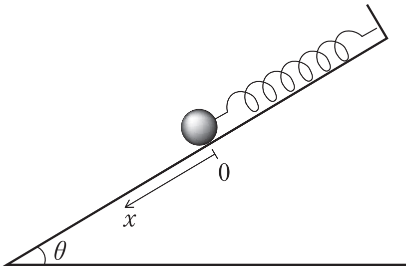
第11講　単振動

1

水平面に対して角度 θ 傾いたなめらかな斜面上にばね定数 k のばねの一端が固定され，他端には質量 m の小球が取り付けてある。小球の位置は，斜面に沿って下向きを正とする x 座標で表わす。ばねに何もつるさないときのばねの端の位置を原点とする。はじめ，図に示すように原点で静止させていた小球を静かに放したところ，斜面上で単振動を始めた。ばねの質量は無視し，重力加速度を g とする。以下の問に答えよ。なお，小球が斜面の端まで届くことはない。



(1)　小球の位置が x のとき加速度は a であった。小球の運動方程式を書け。

(2)　単振動の角振動数と周期を求めよ。

(3)　小球の振動の中心の座標を求めよ。

(4)　単振動の振幅を求めよ。

(5)　小球の振動の最下点の座標を求めよ。

(6)　単振動の中心を通過する速さを求めよ。

(7)　小球を静かに放した時刻を $t=0$ として，時刻 t における小球の位置を表す式を書け。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

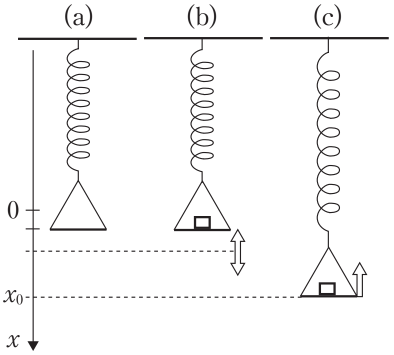
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2

次の文章の［　　］に適切な数式を入れよ。

天井からつり下げたばね定数 k [N/m] の軽いつる巻きばねの先に質量 m [kg] のうすい板が固定されている。鉛直下向きに x 軸をとり，ばねが自然長のときの板の位置を原点とする。また，重力加速度を g [m/s^2] とする。



問1　図(a)のように板が静止しているとき，板の位置は［(1)］[m] であり，重力による板の位置エネルギーとばねの弾性エネルギーの和は［(2)］[J] である。ただし，位置エネルギーは原点を基準とする。

問2　図(a)のように静止した板に質量 $2m$ [kg] の小さなおもりを置き静かに手を離すと，図(b)のようにおもりと板は一体となり単振動をはじめた。振動の中心では力がつりあうことから，振動の中心の位置は［(3)］[m] であり，振幅は［(4)］[m] である。また，周期は［(5)］[s] である。

問3　板に問2と同じおもりを置き，図(c)のように x_0 [m] まで引き下げて静止させた後に静かに手を離すと，おもりと板は一体となり上昇しはじめた。上昇の途中でおもりは板から離れ，重力による減速を受けながら上昇を続け，速度が0となった所で最高点に達した。おもりと板が一体となって上昇する間，板の位置が x [m] のときの下向きの加速度を a [m/s^2]，おもりが板から受ける垂直抗力の大きさを N [N] とする。

おもりと板の運動方程式は，それぞれ，以下のように与えられる。

おもり：$2ma =$［(6)］

板：　$ma =$［(7)］

おもりが板から離れる瞬間の板の位置は［(8)］[m] である。おもりが到達する最高点の位置は［(9)］[m] である。実際におもりが板から離れて運動するためには，$x_0 >$［(10)］[m] でなければならない。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

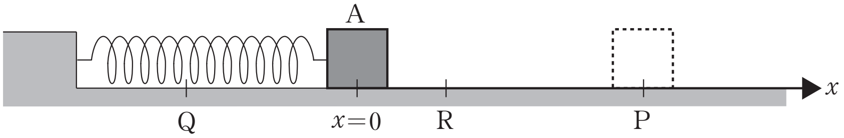
< Note >

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3

次の文章を読み，問１から問３の□の中に適切な数式を入れよ。ただし，問４はグラフに答えよ。

図に示すように，水平な床面上に質量 m [kg] の物体 A をおき，つるまきばねを取り付ける。ばねが床面と水平となるように，ばねの他端を壁に固定する。物体 A は図の x 軸上を運動し，その位置を座標 x [m] で表す。ばねが自然長のとき物体 A の位置を原点 $x = 0$ にとり，ばね定数を k [N/m] とする。物体 A と床面との間の動摩擦係数を μ とする。ただし，重力加速度の大きさは g [m/s^2] とし，ばねの質量は無視できるものとする。



図

物体 A を P 点（$x = 5l$）まで引っ張り，時刻 $t = 0$ で静かに手を放した。このとき，物体 A は x 軸の負の向きに動きはじめ，Q 点（$x = -3l$）で運動の向きを反転し，再び x 軸の正の向きに運動した。その後，物体 A は時刻 $2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ [s] で R 点に停止した。なお，以下の(4)(5)(8)(9)では l を用いて答えよ。

問１　物体 A が P から Q まで移動するとき，ばねにたくわえられた位置エネルギー（弾性エネルギー）の変化は (1) [J] と表される。また，この間に動摩擦力がした仕事は (2) [J] である。両者の仕事は相等しいので，動摩擦係数 μ は (3) と求められる。

問２　時刻 $t = 0$ で手を離れた物体 A はしだいに速さを増し，最大の速さになったのち，徐々に減速して Q 点で 0 となった。この間，物体 A が受ける力は右向きを正として (4) [N] と表される。したがって，物体 A の運動は $x =$ (5) [m] を中心とする単振動の動きに等しいことがわかる。よって，この中心で物体 A の速さは最大となり，その値は (6) [m/s] となる。また，物体 A が Q 点で反転する時刻は (7) [s] である。

問３　つぎに物体 A が Q から R まで移動するとき，物体 A に作用する力は右向きを正として (8) [N] と表され，この区間の振動の中心は $x =$ (9) [m] である。

問４　物体 A の座標 x と時間 t との関係をグラフにせよ。

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

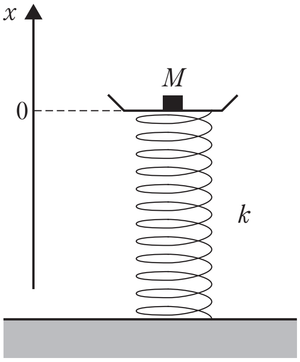
ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第11講　確認テスト

以下の［1］から［8］にあてはまる最も適切な答えを各解答群から1つ選びなさい。ただし，同じ番号をくり返し選んでもよい。数値を選ぶ場合は最も近い値を選ぶものとする。

図のようにばね定数k，自然長Lのばねに上皿が取り付けられている。上皿の面は水平で，ばねと上皿の質量は無視できるものとする。大きさの無視できる質量Mのおもりを上皿に置く。重力加速度の大きさをg，鉛直上向きをx軸の正の向きとし，ばねと上皿とおもりの運動はx軸方向に限るものとする。ばねは常にフックの法則にしたがうものとして，以下の問に答えよ。



(1)　上皿におもりをのせて固定すると，ばねは自然長から$a=$［1］だけ縮んだ。この状態での上皿の位置をx軸の原点とする。さらに上皿をbだけ押し下げてから静かに離すと，ばねは周期$T=$［2］の単振動を行う。

今，$b=2a$とするとき，時刻tの上皿の位置xの時間変化の様子を表すグラフとしてもっとも適切なグラフは［3］である。ただし，上皿を離した瞬間を$t=0$とする。

［1］の解答群

① $\dfrac{Mg}{2k}$　② $\dfrac{Mg}{k}$　③ $\dfrac{3Mg}{2k}$　④ $\dfrac{2Mg}{k}$　⑤ $\dfrac{k}{2Mg}$

⑥ $\dfrac{k}{Mg}$　⑦ $\dfrac{3k}{2Mg}$　⑧ $\dfrac{2k}{Mg}$

［2］の解答群

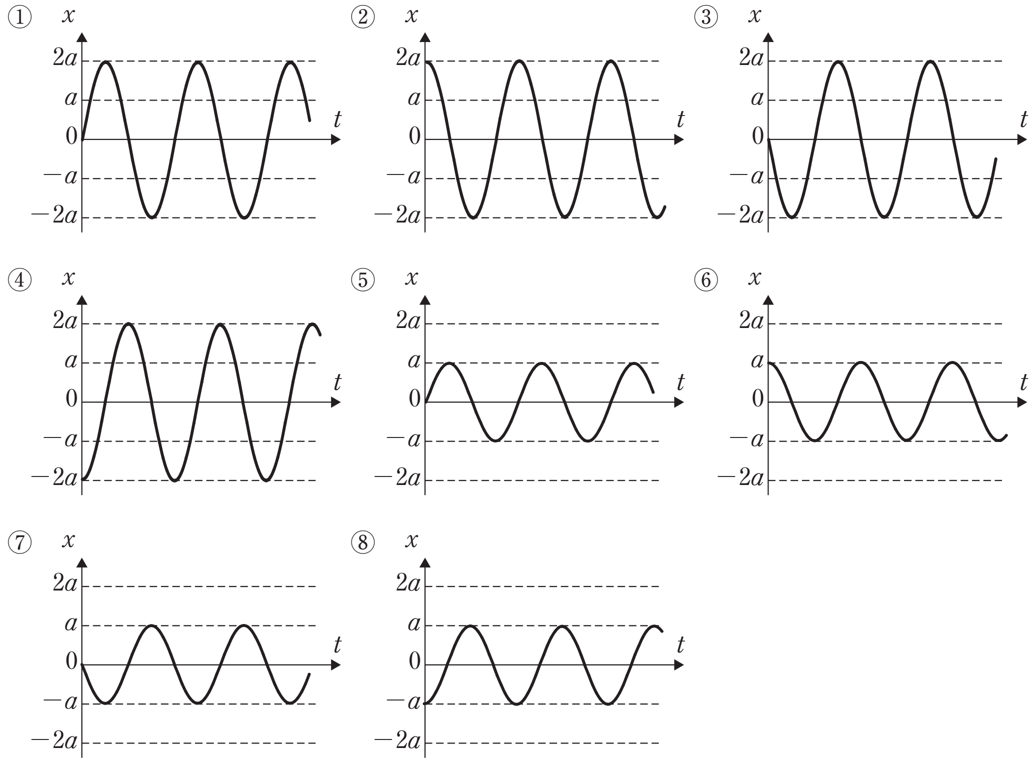
① $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$　② $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{k}{M}}$　③ $\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$　④ $2\pi\sqrt{\dfrac{k}{M}}$　⑤ $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

⑥ $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　⑦ $\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　⑧ $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

[3]の解答群



(2)　次に上皿におもりを固定せずにのせた。ばねが a だけ縮んだ後，さらに上皿を b だけ押し下げてから静かに離す。この場合，ばねは自然長より長くなることはない。なぜならば，おもりは上皿に固定されておらず，ばねと上皿に質量はなく慣性がないためである。

今，b が[4]より小さい場合には，おもりと上皿は(1)で求めた周期 T の単振動を行う。しかし，b が[4]より大きい場合は異なっている。上皿を静かに離した後ばねがのびて $x=$ [4]になったとき，上皿はそこで停止する一方，おもりは上皿から離れて鉛直上向きに運動を続ける。

おもりが上皿から離れる場合として，$b=2a$ のときを考える。おもりが上皿から離れるときのおもりの運動エネルギーは[5]である。おもりは上皿を離れてから時間[6]後に最高点に達する。おもりの最高点の x 座標は[7]である。

(1)で考えたおもりを固定した場合の x のグラフを参考にすると，上皿を静かに離してからおもりが上皿から離れるまでの時間は[8]であることがわかる。以上の考察より，上皿を静かに離した瞬間を時刻 $t=0$ とすると，おもりが最高点に達する時刻は[6]＋[8]である。

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

4 の解答群

① $\dfrac{Mg}{3k}$　② $\dfrac{Mg}{2k}$　③ $\dfrac{Mg}{k}$　④ $\dfrac{4Mg}{3k}$　⑤ $L+\dfrac{Mg}{3k}$

⑥ $L+\dfrac{Mg}{2k}$　⑦ $L+\dfrac{Mg}{k}$　⑧ $L+\dfrac{4Mg}{3k}$

5 の解答群

① $\dfrac{M^2g^2}{2k}$　② $\dfrac{M^2g^2}{k}$　③ $\dfrac{3M^2g^2}{2k}$　④ $\dfrac{2M^2g^2}{k}$　⑤ $\dfrac{5M^2g^2}{2k}$

⑥ $\dfrac{3M^2g^2}{k}$　⑦ $\dfrac{7M^2g^2}{2k}$　⑧ $\dfrac{4M^2g^2}{k}$

6 の解答群

① $\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$　② $\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　③ $\sqrt{\dfrac{2M}{k}}$　④ $\sqrt{\dfrac{3M}{k}}$　⑤ $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$

⑥ $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　⑦ $2\pi\sqrt{\dfrac{2M}{k}}$　⑧ $2\pi\sqrt{\dfrac{3M}{k}}$

7 の解答群

① $\dfrac{Mg}{2k}$　② $\dfrac{Mg}{k}$　③ $\dfrac{3Mg}{2k}$　④ $\dfrac{2Mg}{k}$　⑤ $\dfrac{5Mg}{2k}$

⑥ $\dfrac{3Mg}{k}$　⑦ $\dfrac{7Mg}{2k}$　⑧ $\dfrac{4Mg}{k}$

8 の解答群

① $\sqrt{\dfrac{M}{2k}}$　② $\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　③ $\sqrt{\dfrac{2M}{k}}$　④ $\sqrt{\dfrac{3M}{k}}$　⑤ $\dfrac{\pi}{2}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

⑥ $\dfrac{2\pi}{3}\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　⑦ $\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$　⑧ $2\pi\sqrt{\dfrac{M}{k}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　解答

1

(1)　$ma=-kx+mg\sin\theta$　(2)　角振動数：$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　周期：$2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

(3)　$\dfrac{mg\sin\theta}{k}$　(4)　$\dfrac{mg\sin\theta}{k}$　(5)　$\dfrac{2mg\sin\theta}{k}$

(6)　$g\sin\theta\sqrt{\dfrac{m}{k}}$　(7)　$x=\dfrac{mg\sin\theta}{k}\left\{1-\cos\left(\sqrt{\dfrac{k}{m}}\,t\right)\right\}$

2

問 1　(1)　$\dfrac{mg}{k}$　(2)　$-\dfrac{(mg)^2}{2k}$

問 2　(3)　$\dfrac{3mg}{k}$　(4)　$\dfrac{2mg}{k}$

(5)　$2\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

問 3　(6)　$-N+2mg$　(7)　$N+mg-kx$

(8)　0　(9)　$x_0\left(1-\dfrac{kx_0}{6mg}\right)$

(10)　$\dfrac{6mg}{k}$

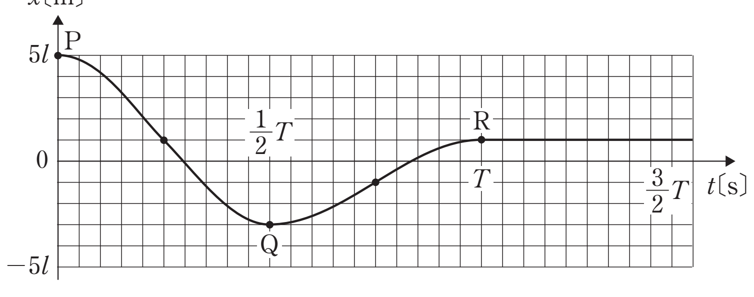
3

問 1　(1)　$-8kl^2$　(2)　$-8\mu mgl$　(3)　$\dfrac{kl}{mg}$

問 2　(4)　$-k(x-l)$　(5)　l　(6)　$4l\sqrt{\dfrac{k}{m}}$　(7)　$\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

問 3　(8)　$-k(x+l)$　(9)　$-l$

問 4　次図



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 11 講　確認テスト

【解答】

1	②	2	⑧	3	④	4	③	5	③
6	④	7	⑤	8	⑥				

【解説】

(1)

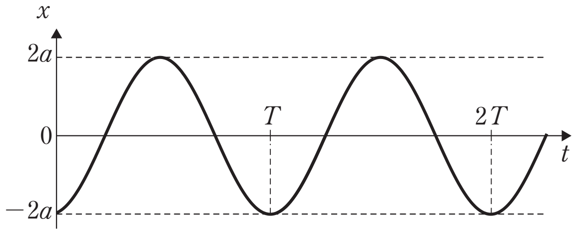
1　力のつりあいより

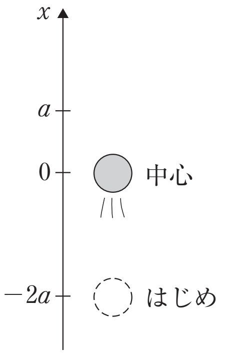
$$ka = Mg \qquad \therefore\ a = \boldsymbol{\frac{Mg}{k}}$$

2　質量 M，ばね定数 k ゆえ，

$$T = \boldsymbol{2\pi\sqrt{\frac{M}{k}}}$$

3　運動の様子は右図。よってグラフは下の様になる。





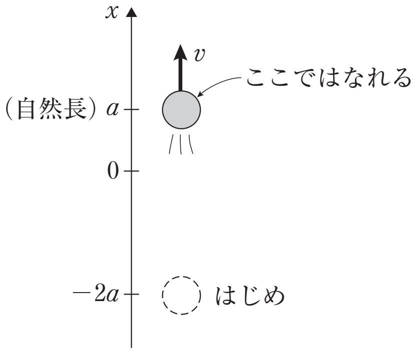
(2)

4　自然長の位置に届かなければよい。よって，$b < a = \boldsymbol{\frac{Mg}{k}}$

5　単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}k(-2a)^2 = \frac{1}{2}Mv^2 + \frac{1}{2}ka^2$$

$$\therefore\ \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{3}{2}ka^2 = \boldsymbol{\frac{3M^2g^2}{2k}}$$



6　**5** より，はなれるときの速さは

$$v = \sqrt{\frac{3Mg^2}{k}}$$

なので，

$$0 = \sqrt{\frac{3Mg^2}{k}} - gt \qquad \therefore\ t = \boldsymbol{\sqrt{\frac{3M}{k}}}\ \text{で止まる。}$$

7　皿をはなれてから，さらに上がった分を h として

$$0^2 - v^2 = 2(-g)h \qquad \therefore\ h = \frac{v^2}{2g} = \frac{3Mg}{2k}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

よって，最高点の x 座標は

$$x=a+h=\frac{\boldsymbol{5Mg}}{\boldsymbol{2k}}$$

| 8 | | 3 | も考慮して，時刻 t での位置は

$$x=-2a\cos\omega t\quad\left(\omega=\sqrt{\frac{k}{M}}\right)$$

と書ける。はなれるのは，$x=a$ に初めてつくときだから，

$$a=-2a\cos\omega t\qquad\cos\omega t=\frac{-1}{2}$$

$$\therefore\quad \omega t=\frac{2\pi}{3}\ \text{で}\ t=\frac{\boldsymbol{2\pi}}{\boldsymbol{3}}\sqrt{\frac{\boldsymbol{M}}{\boldsymbol{k}}}\ \text{のとき。}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。